Fen-Edebiyat Fakültesi	FİNAL SINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz III	
İmza:	Sınav Tarihi: 31 Ocak 2022	

Her soru 25 puandır. Süre 75dk.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)+\sqrt{n}}{n^{7/4}}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm:

$$\left|\frac{\cos(nx^2)+\sqrt{n}}{n^{7/4}}\right| \le \frac{1+\sqrt{n}}{n^{7/4}} = M_n, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi ile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ serisine limit karşılaştırma testi uygulayalım.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^{7/4}} n^{5/4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{1/2}}{n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} + 1 = 1$$

ve $0 < L < \infty$ sebebiyle iki seri aynı karakterlidir. İkinci seri yakınsank olduğundan $(p = 5/4 > 1)$, ilk seri de yakınsar. Weierstrass-M testine göre soruda verilen seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{n}{n^2+1}(-1)^n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını belirleyin.

Çözüm: Oran testi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{n^2}{(n+1)^2+1} = 2|x|$$

olduğundan seri $2|x| < 1$ için yakınsar, $2|x| > 1$ için ıraksar. Yakınsaklık yarıçapı 1/2'dir. Aralığın uç noktalarını inceleyelim.

Orjinal seride $x = 1/2$ yazarsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(-1)^n$ serisini elde ederiz. Şimdi $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ yazarsak (i) $a_n \geq 0$, (ii) $a_{n+1} - a_n = \frac{1-n-n^2}{(1+(1+n)^2(1+n^2))} < 0$, $\forall n \geq 1$ ve (iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ şartları sağlandığından, alterne seri testine göre bu seri yakınsar.

Orjinal seride $x = -1/2$ yazarsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ serisini elde ederiz. Bu seri limit karşılaştırma kriterine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ile aynı karakterlidir ve her iki seri de ıraksar (ikinci seri harmonik seridir, $p = 1$).

Yani yakınsaklık aralığı $(-1/2, 1/2]$ olur.

3. $f(x) = |x| + 1$ fonksiyonunun Fourier açılımını bulunuz.

İpucu: $\int x\sin(nx)dx = -x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}$, $\quad \int x\cos(nx)dx = \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{n}$.

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ $\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1, 2, 3, \ldots$

Çözüm: Fonksiyon çift. $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)dx = 2+\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{x}\right)\Big|_{x=0}\,\pi = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_{2n} = 0, \qquad a_{2n-1} = \frac{-4}{\pi(2n-1)^2}$$

Cevap:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

4. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3}$ integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: İntegrasyon aralığı sınırsız olduğundan ve

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}+x^3} = \infty$$

olduğundan verili integral 3. tip has olmayan integraldir.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3}$$

yazalım.

Limit karşılaştırma kriterine göre $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3}$ integrali ile $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali aynı karakterlidir zira

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^{5/2}} = 1$$

ve $0 < L < \infty$ olur. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali $(0,1)$ aralığında $p = 1/2$ integrali olduğundan yakınsaktır ve her iki integralde yakınsar.

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3}$ integrali ile $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}$ integrali aynı karakterlidir zira

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x}+x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^{5/2}}+1} = 1$$

ve $0 < L < \infty$ olur. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}$ integrali $(1,\infty)$ aralığı üzerinde $p = 3 > 1$ integrali olduğundan yakınsaktır ve her iki integralde yakınsar.

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3}$ ve $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3}$ integralleri yakınsak olduğundan verilen integral yakınsar.